# Eine Erweiterung des ersten NOETHERschen Satzes

Von HEINZ STEUDEL

Aus der Arbeitsgruppe für Grundlagenforschung der Theorie der Teilchen und Felder
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforschg. **17 a**, 133—135 [1962]; eingegangen am 14. November 1961)

If an infinitesimal transformation of coordinates and field quantities is such that the Lagrangian density $L$ is multiplied by a constant factor there is a current density $j^\nu$ satisfying the equation

$$\partial_\nu j^\nu = L$$

as a result of the field equations.

Application of this theorem to potential theory yields a well-known equation.

Application to the HEISENBERGS non linear spinor theory yields an equation identical with the conservation-theorem derived [1] by using a scale-transformation with $l$ treated as fifth variable.

Bei der Skalentransformation in der HEISENBERGschen nichtlinearen Spinortheorie [1] wird die Größe $l$, die in den Feldgleichungen als Parameter auftritt, mittransformiert. Die physikalische Bedeutung eines solchen Verfahrens ist schwer durchschaubar. Wenn man auf die Mittransformation von $l$ verzichtet und nur die Koordinaten und Feldgrößen mit konstanten Faktoren multipliziert, so läßt sich eine Invarianz der LAGRANGE-Dichte $L$ nicht erreichen, wohl aber Invarianz bis auf einen konstanten Faktor. Dieser Faktor ändert die Form der Differentialgleichung nicht. Somit werden wir auf das Problem der vorliegenden Arbeit geführt.

Welche Aussagen lassen sich ableiten aus der Voraussetzung, daß sich die LAGRANGE-Dichte $L$ bzw. das entsprechende Wirkungsintegral $W$ bei einer infinitesimalen Transformation mit einem konstanten Faktor multipliziert?

## 1. Erweiterung des ersten Noetherschen Satzes

Bei einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten $x^\mu$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ und der Feldgrößen $q_A$ $(A = 1, \ldots, N)$

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu; \quad q_A'(x^{\mu'}) = q_A(x^\mu) + \delta q_A(x^\mu) \quad (1)$$

erhalten wir genau wie bei der üblichen Ableitung des ersten NOETHERschen Satzes (siehe etwa Anm. [2]) für die Variation des Wirkungsintegrals

$$W = \int L(x^\mu, q_A, q_{A,\mu}) \, \mathrm{d}^n x, \quad (2)$$

$$\delta W = \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_{A,\mu}} \delta_0 q_A + L \, \delta x^\mu \right] \mathrm{d}^n x, \quad (3)$$

Dabei ist
$$\delta_0 q_A \equiv \delta q_A - q_{A,\mu} \, \delta x^\mu; \quad (4)$$
$_{,\mu}$ bezeichnet die partielle Ableitung nach $x^\mu$.

Wenn nun
$$\delta W = \lambda W \quad (5)$$
ist, so erhalten wir

$$\int \left[ \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{A,\nu}} \frac{\delta_0 q_A}{\lambda} + L \frac{\delta x^\nu}{\lambda} \right) - L \right] \mathrm{d}^n x = 0 \quad (6)$$

und der Stromvektor

$$j^\nu = \frac{\partial L}{\partial q_{A,\nu}} \frac{\delta_0 q_A}{\lambda} + L \frac{\delta x^\nu}{\lambda} \quad (7)$$

hat die Eigenschaft
$$\partial j^\nu / \partial x^\nu = L \quad (8)$$

oder in integraler Schreibweise

$$\int L \, \mathrm{d}^n x = \int j^\nu \, \mathrm{d}\sigma_\nu, \quad (9)$$

wo links über ein beliebiges Raumgebiet, rechts über dessen Oberfläche zu integrieren ist.

Handelt es sich um den MINKOWSKI-Raum $(n = 4)$, so können wir mit der Abkürzung

$$W(t) = \int_{x^4 = ct_0}^{ct} \iiint_{-\infty}^{+\infty} L \, \mathrm{d}^4 x \quad (10)$$

schreiben

$$\int_{x^4 = ct} j^4 \, \mathrm{d}^3 x - W(t) = \text{const}. \quad (11)$$

## 2. Beispiele

a) *Potentialtheorie*

Zu der LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (12)$$

[1] H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].

[2] E. L. HILL, Rev. Mod. Phys. **23**, 253 [1951].

die auf die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ (13)

führt, können wir die infinitesimale Transformation

$$\delta u = \tfrac{1}{2} \lambda u \, ; \qquad (\delta L = \lambda L) \tag{14}$$

angeben und dazu nach (7) den Stromvektor berechnen

$$j_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} u \, . \tag{15}$$

Gl. (9) schreibt sich dann:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, \mathrm{d}^3 x = \int u \frac{\partial u}{\partial x_k} \, \mathrm{d}\sigma_k \, . \tag{16}$$

Das ist eine bekannte Formel aus der Potentialtheorie, die man am einfachsten direkt aus der ersten GREENschen Integralformel gewinnen kann. Gl. (9) kann somit auch als Verallgemeinerung von (16) angesehen werden.

b) *Die Skalentransformation in der* HEISENBERG*schen nichtlinearen Spinortheorie*

Die LAGRANGE-Dichte zur HEISENBERG-Gleichung [1] ist

$$L = \tfrac{1}{2} \overline{\psi} \gamma^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi + \frac{l^2}{2} (\overline{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi)(\overline{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)$$
$$\left(\overleftrightarrow{\partial}_\nu \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\nu}\right). \tag{17}$$

Wir führen die infinitesimale Transformation

$$\delta x^\nu = \varepsilon x^\nu ; \quad \delta \psi = -\tfrac{1}{2} \varepsilon \psi ; \quad \delta \overline{\psi} = -\tfrac{1}{2} \varepsilon \overline{\psi} \tag{18}$$

aus. Transformationen wie (14) und (18), bei denen die Koordinaten und Feldfunktionen mit konstanten Faktoren multipliziert werden, wollen wir „faktorielle Transformationen" nennen. Den Namen „Skalentransformation" vermeiden wir absichtlich, um nicht an bestimmte physikalische Deutungen und an Dimensionsbetrachtungen gebunden zu sein.

Für die Änderung des Wirkungsintegrals gilt dann

$$\delta W = 2 \varepsilon W \tag{19}$$

Also haben wir $\lambda = 2\varepsilon$ zu setzen und mit

$$\delta_0 \psi = -\tfrac{1}{2} \varepsilon \psi - \varepsilon \psi_{,\nu} \delta x^\nu \tag{20}$$

haben wir

$$j^\nu = \frac{x^\lambda}{4} (\overline{\psi} \gamma^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\lambda \psi) + \tfrac{1}{2} L x^\nu , \tag{21}$$

$$\int\limits_{(x^4 = ct)} \left[\frac{x^\lambda}{4} (\overline{\psi} \gamma^4 \overleftrightarrow{\partial}_\lambda \psi) + \tfrac{1}{2} L x^4\right] \mathrm{d}^3 x - W(t) = \text{const} \, . \tag{22}$$

Durch Einführung einer zusätzlichen Variablen läßt sich Gl. (8) als echter Erhaltungssatz schreiben. Am Beispiel der HEISENBERG-Gleichung wollen wir $l$ als fünfte Variable betrachten. Die Feldfunktionen werden dann Funktionen auch von $l$

$$\psi(l, x^\nu), \tag{23}$$

die den Feldgleichungen

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + l^2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\overline{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = 0 \tag{24}$$

identisch in $x^\nu$ und $l$ genügen müssen.

Unter Beachtung der Feldgleichungen (worauf durch Ausrufezeichen aufmerksam gemacht werden soll) können wir schreiben

$$\begin{aligned} L &= -\frac{l^2}{2} (\overline{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi)(\overline{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \quad (!) \\ &= \tfrac{1}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu \psi_{,\mu} = -\tfrac{1}{2} \overline{\psi}_{,\mu} \gamma^\mu \psi \, . \quad (!) \end{aligned} \tag{25}$$

Aus (25) und den Feldgleichungen (23) läßt sich die Gleichung

$$2L = \frac{l}{2} \partial_\mu (\overline{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_l \psi) + l \frac{\partial}{\partial l} L \tag{26}$$

gewinnen. Hiermit wird aus (8):

$$\partial_\mu \left[2 j^\mu - \frac{l}{2} (\overline{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_l \psi)\right] = l \frac{\partial}{\partial l} L \, . \tag{27}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} 2 j^\mu - \frac{l}{2} (\overline{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_l \psi) &= s^\mu , \\ L &= s^5 , \\ (\mathrm{d}l)/l &= \mathrm{d}x^5 , \end{aligned} \tag{28}$$

so folgt für den Fünfervektor $s_k$ der Erhaltungssatz

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{\partial s^k}{\partial x^k} = 0 \, . \tag{29}$$

Setzen wir in (27) $j^\mu$ aus (21) ein und integrieren über $x^\mu$, so folgt

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4 x \, l \frac{\partial L}{\partial l} = \int \mathrm{d}^4 x \frac{\partial}{\partial x^\nu} [&\tfrac{1}{2} \overline{\psi} \gamma^\nu (x^\mu \psi_{,\mu} + l \psi_{,l}) \\ &- \tfrac{1}{2} (x^\mu \overline{\psi}_{,\mu} + l \overline{\psi}_{,l}) \gamma^\nu \psi - x^\nu L] \, . \end{aligned} \tag{30}$$

Das aber ist genau die Formel (13) in Anm. [1], also der aus der HEISENBERGschen Skalentransformation abgeleitete Erhaltungssatz.

Wir können ihn auch in der Form

$$\int\limits_{(x^4 = const)} s^4 \quad \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3 \, \mathrm{d}x^5 = \text{const} \tag{31}$$

schreiben. Dieser Erhaltungssatz und die daraus resultierende Quantenzahl beziehen sich auf die Funktionen $\psi(l, x^\nu)$ in einem fünfdimensionalen $x^\nu, l$-Raum. Einer Lösung $\psi(x^\nu)$ der Feldgleichungen kann eine solche Quantenzahl nicht zugeordnet werden, weil die Fortsetzung in $l$-Richtung nicht eindeutig ist.

Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß der fünften Dimension eine tiefere Bedeutung nicht zukommt, so enthält unsere Gl. (22) genau den physikalischen Kern des fünfdimensionalen Erhaltungssatzes.

Es kann natürlich im Rahmen der hier vorliegenden Behandlung auf dem Boden der klassischen Feldtheorie nicht ausgeschlossen werden, daß die quantisierte Theorie eine neue Interpretation dieses fünfdimensionalen Erhaltungssatzes liefert.

Herrn Dr. STRAUSS danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

# Schwankungen der primären kosmischen Strahlung

Von E. WAIBEL *

Aus dem Max-Planck-Institut für Aeronomie, Lindau/Han.

(Z. Naturforschg. 17 a, 135--142 [1962]; eingegangen am 23. Dezember 1961)

Am 23. 8. 1960 wurden über Lindau (Norddeutschland) bei relativ ruhiger kosmischer Strahlung mit einer Ballonsonde die Häufigkeiten der primären $\alpha$-Teilchen, Protonen und der Gesamtstrahlung gemessen (magnetische Mindeststeifigkeit 2,38 GV). Eine Extrapolation der Strahlungsintensitäten auf 0 g/cm² führt für die Gesamtstrahlung zu $0{,}134 \pm 0{,}003$ $(\mathrm{cm}^2\ \mathrm{sec\ sr})^{-1}$ und für die $\alpha$-Teilchen unter Berücksichtigung der Aufspaltung schwerer Kerne zu $0{,}0175 \pm 0{,}0006$ $(\mathrm{cm}^2\ \mathrm{sec\ sr})^{-1}$. Ein Vergleich mit in der Zeit von 1957—1959 gemachten Messungen, z. Tl. bei FORBUSH-Effekten, führt sowohl für die Gesamtstrahlung als auch die $\alpha$-Komponente zu dem gleichen logarithmischen Schwankungsfaktor von $2{,}1 \pm 0{,}3$, bezogen auf die Neutronenregistrierung am Boden in Lindau. Die Häufigkeit der extrapolierten $\alpha$-Teilchen macht im Mittel 13% der Gesamtstrahlung aus.

Während der Phase hoher und höchster Aktivität im 11-jährigen Sonnenfleckenzyklus wurde in der Zeit von April 1957 bis August 1960 in einer Serie von Ballonaufstiegen das Ionisationsspektrum der kosmischen Strahlung gemessen. Zwei dieser Experimente fanden während starker FORBUSH-Effekte statt. Hierbei wurden sowohl die absoluten Intensitäten der Gesamtstrahlung, der Protonen und der $\alpha$-Teilchen ermittelt als auch die zeitlichen Schwankungen dieser Komponenten untersucht. Die Trennung der Teilchen verschiedener Ladung wurde durch die lineare Abhängigkeit der spezifischen Ionisation vom Quadrat der Ladungszahl ermöglicht bei Ausschluß langsamer, stark ionisierender Teilchen.

Die $\alpha$-Teilchen-Komponente der kosmischen Strahlung zeichnet sich durch ihre weitgehende Freiheit von Sekundäreffekten, wie z. B. der Albedo und ihre doch relativ hohe Teilchenintensität vor den übrigen primären Komponenten mit höherer oder niedrigerer Ladungszahl aus. Dies ist von großer Bedeutung, wenn man absolute Intensitäten vergleichen will, die mit verschiedenen Methoden ermittelt wurden.

Im Zusammenhang mit den möglichen Modulationsmechanismen ist andererseits das Verhältnis der zeitlichen Schwankungen der Komponenten zueinander von Interesse; das gilt insbesondere für die primären Protonen und $\alpha$-Teilchen. Soweit die Experimente mit einheitlichen Geräten erfolgen, entfallen etliche systematische Fehler, die die absoluten Häufigkeiten beeinflussen. Dies trifft für die Reihe unserer Messungen zu, so daß die Schwankungen der untersuchten Komponenten zueinander und in bezug auf die Neutronenregistrierungen am Erdboden aus Relativwerten gewonnen werden können.

Über den letzten Ballonaufstieg dieser Serie am 23. 8. 60 wird in dieser Arbeit ausführlich berichtet. Die Strahlung war an diesem Tage nicht durch einen FORBUSH-Effekt gestört, so daß die Messungen zum Vergleich mit den stark verminderten Strahlungswerten, besonders am 16. 7. 59, sehr geeignet sind.

## Die experimentelle Technik

Das Aufstiegsgerät besteht aus drei zu einem Teleskop zusammengefaßten Proportionalzählern zur Messung der spezifischen Ionisation der schnellen Partikel, der zugehörigen Elektronik und aus einem kleinen Teleskop aus GEIGER-MÜLLER-Zählern zur Registrierung der weichen Strahlung.

Da die Funktionsweise der Sonde bereits eingehend in Anm. [1] diskutiert wurde bis auf einige Zusätze, sei

* Jetzt Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig.

[1] E. WAIBEL, Mitt. Max-Planck-Inst. Aeronomie Nr. 1 (Berlin 1959).